УДК 681.5 EDN FOBKXF
https://www.doi.org/10.47813/mip.7.2026.20.3013

Анализ периодического контроля динамических систем

М.А. Посохов*

Московский технический университет связи и информатики, ул. Авиамоторная, 8А, Москва, 111024, Россия

*E-mail: mikhail.posokhov@yandex.ru

Аннотация. Целью работы является решение задачи определения вектора контрольных точек, расставляемых для контроля динамической системы. Расстановка должна обеспечивать оптимально минимальные затраты на управление системой. В работе рассмотрены одномерная и многомерная периодическая проверки. Для каждого из этих типов проверки была решена задача определения решения, глобально оптимального в среднем. Проведен анализ производительности проверки путем статистического моделирования в зависимости от размера потока моментов плохого состояния системы. По результатам моделирования сформулирована теорема об оптимальности периодической проверки для любого размера вектора контроля. Метод периодической проверки позволяет снизить средние суммарные затраты на контроль динамической системы, в случае, если стоимость эксплуатации точки контроля не является высокой, и распределение вектора моментов плохого состояния близко к равномерному. Полученные результаты могут быть полезны администраторам динамических систем и применяться на практике для систем различного типа.

Ключевые слова: динамическая система, контрольная точка, расстановка контрольных точек, многомерная оптимизация, минимизация затрат на контроль.

Для цитирования: Посохов, М. А. Анализ периодического контроля динамических систем / М. А. Посохов // Модернизация, Инновации, Прогресс (MIP ENGINEERING-VII-2026): материалы VII Всероссийской (национальной) научной конференции (Красноярск, 11–12 сентября 2026 г.). – Красноярск: Красноярский краевой Дом науки и техники Российского Союза научных и инженерных общественных объединений, 2026. – Т. 20. – С. 112-119. – https://doi.org/10.47813/mip.7.2026.20.3013. – EDN: FOBKXF.

Analysis of the periodic control of dynamic systems

M.A. Posokhov*

Moscow Technical University of Communications and Informatics, Aviamotornaya str., 8A, Moscow, 111024, Russia

*E-mail: mikhail.posokhov@yandex.ru

Abstract. The aim of this study is to find the vector of checkpoints, used to control the dynamic system. The placement of these points must ensure that the costs associated with system control are minimized. The paper examines both one-dimensional and multidimensional periodic controlling schemes. For each type of control, the problem of finding a globally optimal solution (in the average sense) was solved. Control performance was analyzed via statistical modeling, specifically examining the impact of the arrival rate of system "bad-state" events. Based on the modeling results, a theorem regarding the optimality of periodic control for a vector of checkpoints of any size is formulated. The periodic control method makes it possible to reduce the average total costs associated with controlling the dynamic system, if addition of a checkpoint is not costly, and “bad-state” input distribution is close to uniform. The results obtained may be useful to dynamic system administrators and applicable in practice to various types of systems.

Keywords: dynamic system, checkpoints, checkpoint setting, multivariate optimization, minimization of control costs.

For citation: Posokhov, M. A. Analysis of the periodic control of dynamic systems / M. A. Posokhov // Modernization, Innovations, Progress (MIP ENGINEERING-VII-2026): Proceedings of the VII All-Russian (National) Scientific Conference (Krasnoyarsk, September 11–12, 2026). – Krasnoyarsk: Krasnoyarsk Regional Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Public Associations, 2026. – Vol. 20. – P. 112-119. – https://doi.org/10.47813/mip.7.2026.20.3013. – EDN: FOBKXF.

1. Введение

В работах [1-2] уже исследовалась проблема контроля динамических систем. Выяснилось, что у предложенного метода контроля не существует готового универсального метода, который бы позволял находить глобально оптимальное решение из-за отсутствия дифференцируемости у функции затрат на проверку. Авторы работ [3-4] рассматривали проблему размещения контрольных точек. Однако, предложенные модели не решали задачу контроля динамической системы, именно поэтому в этой статье требуется проанализировать одну из методик контроля динамических систем.

2. Анализ одномерной периодической проверки

Пусть в систему, функционирующую на интервале $(0,B)$, прибывает поток $\mathbf{t}$ из n элементов распределения $F(t_i)$, где B – предел интервала проверки. Суммарные затраты на проверку в момент времени z, принимают следующий вид.

$$S(\mathbf{t},z,B,a)=a\left[\sum_{\substack{i=1\\ z\geq t_i}}^{k}(z-t_i)+\sum_{\substack{i=1\\ z<t_i}}^{m}(B-t_i)\right]=a\left(kz+mB-\sum_{i=1}^{n}t_i\right), \quad (1)$$

где a – линейный множитель затрат, k – число моментов плохого состояния, расположенных слева от z, m – число моментов плохого состояния, расположенных справа от z, $k+m=n$. Требуется определить средние суммарные затраты при $z=\frac{B}{2}$. В данной работе вектор $\mathbf{t}$ моделируется как равномерный случайный вектор, состоящий из элементов, независимых друг от друга. Пусть на интервале $(0,B)$ было отслежено n моментов плохого состояния системы, каждый из которых (t_i) имеет функции распределения $F(t_i)$ и плотности $f(t_i)$ ниже [5].

$$F(t_i)=\begin{cases}0, t_i<0\\ \frac{t_i}{B}, 0\leq t_i\leq B,\\ 1, t_i>B\end{cases}\qquad f(t_i)=\begin{cases}\frac{1}{B}, 0\leq t_i\leq B\\ 0, t_i\notin[0,B]\end{cases}. \quad (2)$$

Пусть в систему прибывает поток $\mathbf{t}$ из n элементов равномерного распределения $U[0,B]$, где B – предел интервала проверки. Суммарные затраты на проверку в момент времени $z=\frac{B}{2}$, принимают следующий вид.

$$S\left(\mathbf{t}, z=\frac{B}{2}, B, a\right)=a\left[\sum_{\substack{i=1 \\ \frac{B}{2}\geq t_i}}^{k}\left(\frac{B}{2}-t_i\right)+\sum_{\substack{i=1 \\ \frac{B}{2}<t_i}}^{m}\left(B-t_i\right)\right]=a\left(\frac{kB}{2}+mB-\sum_{i=1}^{n}t_i\right). \quad (3)$$

Для того, чтобы эмпирически оценить средние значения затрат на периодическую проверку $M\left[S\left(\mathbf{t}, \frac{B}{2}, B, a=1\right)\right]$ были проведены вычислительные эксперименты для оценки при $B=24$ и $a=1$ для разных значений n (таблица 1).

Таблица 1. Результаты вычислений средних затрат.

n	$M\left[S\left(\mathbf{t}, \frac{B}{2}, B, a=1\right)\right]$
1	5.996732
2	11.98578
3	17.97349
4	23.97012
5	29.96896
6	36.00334
7	41.97601

Результаты выше показали, что величина $M\left[S\left(\mathbf{t}, \frac{B}{2}, B, a=1\right)\right]$ линейно связана с параметром n, то есть при увеличении количества моментов плохого состояния растут и средние затраты на периодическую проверку.

В работе [2] уже приводилось доказательство того, что глобально оптимальной в среднем точкой контроля является $z=\frac{B}{2}$. Теперь необходимо оценить средние суммарные затраты в ней. Приводится ниже формула средних суммарных затрат.

$$S_{ср.}\left(z, n, B, a\right)=an\left(\frac{z^2}{B}-z+\frac{B}{2}\right) \quad (4)$$

Тогда при $z=\frac{B}{2}$ получаем:

$$S_{ср.}\left(z=\frac{B}{2}, n, B, a\right)=an\left(\frac{B^2}{4B}-\frac{B}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{anB}{4}. \quad (5)$$

Ниже приведена таблица для сравнения полученных и ожидаемых значений средних суммарных затрат при $z=\frac{B}{2}$ (таблица 2).

Таблица 2. Результаты вычислений средних затрат.

n	$M\left[S\left(\mathbf{t},\frac{B}{2},B,a=1\right)\right]$	$\frac{anB}{4}$
1	5.996732	6
2	11.98578	12
3	17.97349	18
4	23.97012	24
5	29.96896	30
6	36.00334	36
7	41.97601	42

Как видно из данных из таблицы выше, полученные значения не сильно отличаются от ожидаемых. Стоит уточнить, сходимость полученных значений к ожидаемым, как в таблице выше, возможно только для непрерывно-дифференцируемой $f(t_i)$, такой что:

$$f(t_i)=\begin{cases}\frac{1}{L},0\le t_i\le L\\ 0,t_i\notin[0,L]\end{cases}\to L=B. \tag{6}$$

3. Анализ многомерной периодической проверки

Рассмотрим такой вариант контроля динамической системы: интервал работы системы $(0,B)$ можно разделить на попарно не пересекающиеся подынтервалы, в каждом из которых будет проводится отдельная проверка подмножества моментов плохого состояния. Очевидно, что при использовании большего числа точек контроля тратится больше ресурсов на эксплуатацию контроля.

Пусть в систему, работающую на интервале $(0,B)$ прибывает поток $\mathbf{t}$ из n элементов распределения $F(t_i)$, где B – предел интервала проверки. Проверка проводится с постановкой k контрольных точек со стоимостью эксплуатации $c\ge 0$. Суммарные затраты на проверку при постановке вектора контроля $\mathbf{z}$, принимают следующий вид:

- при k – нечетное число:

$$S(\mathbf{t},\mathbf{z},k.B,a,c)=a\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}}\left[\left(\sum_{z_{2i-2}<t_i\le z_{2i-1}}(z_{2i-1}-t_j)+\sum_{z_{2i-1}<t_i\le z_{2i}}(z_{2i}-t_j)\right)+\sum_{z_{k-1}<t_i\le B}(B-t_j)\right]+kc, \tag{7}$$

- при k – четное число;

$$S(\mathbf{t},\mathbf{z},k.B,a,c)=a\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}\left[\sum_{z_{2i-2}<t_i\le z_{2i-1}}\left(z_{2i-1}-t_j\right)+\sum_{z_{2i-1}<t_i\le z_{2i}}\left(z_{2i}-t_j\right)\right]+kc, \tag{8}$$

где $z_0=0$, $z_k=B$.

Под многомерной периодической проверкой понимается такая постановка точек контроля $z_1,z_2,...,z_k=B$, что:

$$z_1=z_2-z_1=z_3-z_2=\cdots=z_{k-1}-z_{k-2}=B-z_{k-1} \tag{9}$$

Для того, чтобы эмпирически оценить средние значения затрат на периодическую проверку $M\left[S(\mathbf{t},\mathbf{z},k,B,a=1,c=0)\right]$ были проведены вычислительные эксперименты для оценки при $B=24$, $a=1$ и $c=0$ для разных значений n и k (таблица 3).

Таблица 3. Результаты вычислений средних затрат.

n	k	$M\left[S(\mathbf{t},\mathbf{z},k,B,a=1,c=0)\right]$
1	2	6.0546
	3	3.9999
	4	3.022
	5	2.3838
2	2	11.9562
	3	7.9931
	4	5.9904
	5	4.7806
3	2	18.051
	3	11.9831
	4	9.0369
	5	7.2047

Результаты выше показали, что величина $M\left[S(\mathbf{t},\mathbf{z},k,B,a=1,c=0)\right]$ линейно связана с параметрами n и k. При повышении значения n средние суммарные затраты возрастают, а при увеличении k уменьшаются в среднем для любого n при $k\to\infty$ (только при $c=0$).

Теперь необходимо определить такой вектор $\mathbf{z}^*$, при котором многомерная проверка системы является глобально оптимальной в среднем. Для этого формулы (7) и (8) можно преобразовать следующим образом:

$$S_{ср.}(\mathbf{z},n,k,B,a,c)=an\left[\begin{pmatrix}\frac{z_1}{B} & \frac{z_2-z_1}{B} & \cdots & \frac{B-z_{k-1}}{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\cdots\\B\end{pmatrix}-\frac{B}{2}\right]+kc. \tag{10}$$

Чтобы найти вектор $\mathbf{z}^*$ необходимо выражение выше раскрыть в виде функции ниже с опущением коэффициентов a, c и k:

$$S_{cp.}(\mathbf{z},n,B)=\frac{n}{B}\left[\sum_{i=1}^{k-1}z_i^2-\sum_{i=1}^{k-2}z_iz_{i+1}\right]-n\left(z_{k-1}-\frac{B}{2}\right). \tag{11}$$

Теперь необходимо рассчитать градиент функции выше и преобразовать в решение системы уравнений ниже:

$$\nabla S_{cp.}=\left\{\frac{\partial S_{cp.}}{\partial z_1}\quad\frac{\partial S_{cp.}}{\partial z_2}\quad\frac{\partial S_{cp.}}{\partial z_3}\quad\cdots\quad\frac{\partial S_{cp.}}{\partial z_{k-1}}\right\}\to\begin{cases}\frac{2z_1}{B}-\frac{z_2}{B}=0\\ \frac{2z_2}{B}-\frac{z_1}{B}-\frac{z_3}{B}=0\\ \frac{2z_3}{B}-\frac{z_2}{B}-\frac{z_4}{B}=0\\ \cdots\\ \frac{2z_{k-1}}{B}-\frac{z_{k-2}}{B}-\frac{z_k}{B}=0\end{cases}=\begin{cases}\frac{2z_1}{B}-\frac{z_2}{B}=0\\ \frac{2z_2}{B}-\frac{z_1}{B}-\frac{z_3}{B}=0\\ \frac{2z_3}{B}-\frac{z_2}{B}-\frac{z_4}{B}=0\\ \cdots\\ \frac{2z_{k-1}}{B}-\frac{z_{k-2}}{B}=1\end{cases} \tag{12}$$

Решая систему выше методом Гаусса получается вектор $\mathbf{z}$, такой что:

$$z_1,z_2,...,z_k=\left(\frac{B}{k}\quad\frac{2B}{k}\quad\frac{3B}{k}\quad\cdots\quad\frac{(k-1)B}{k}\quad B\right). \tag{13}$$

Вектор выше соответствует условию (9), теперь подставим в функцию (10):

$$S_{cp.}(\mathbf{z},n,k,B,a,c)=an\left[\begin{pmatrix}\frac{B}{Bk}&\frac{2B-B}{Bk}&\cdots&\frac{B-z_{k-1}}{Bk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{B}{k}\\ \frac{2B}{k}\\ \cdots\\ B\end{pmatrix}-\frac{B}{2}\right]=$$

$$=an\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{k}&\frac{1}{k}&\cdots&\frac{1}{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{B}{k}\\ \frac{2B}{k}\\ \cdots\\ B\end{pmatrix}-\frac{B}{2}\right]=an\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{iB}{k^2}-\frac{B}{2}\right]=an\left[\frac{B(k+1)}{2k}-\frac{B}{2}\right]=$$

$$=an\left[\frac{Bk+B-Bk}{2k}\right]=\frac{anB}{2k}.$$

Ниже приведена таблица 4 для сравнения полученных и ожидаемых значений средних суммарных затрат при $\mathbf{z}=z_1,z_2,...,z_k$ (13), $a=1$, $c=0$.

Таблица 4. Результаты вычислений средних затрат.

n	k	$M\left[S\left(\mathbf{t},\mathbf{z},k,B,a=1,c=0\right)\right]$	$\frac{anB}{2k}$
1	2	6.0546	6
	3	3.9999	4
	4	3.022	3
	5	2.3838	2.4
2	2	11.9562	12
	3	7.9931	8
	4	5.9904	6
	5	4.7806	4.8
3	2	18.051	18
	3	11.9831	12
	4	9.0369	9
	5	7.2047	7.2

Как видно из данных из таблицы выше, полученные значения не сильно отличаются от ожидаемых. Стоит уточнить, сходимость полученных значений к ожидаемым, как в таблице выше, возможно только для $f\left(t_i\right)$ с условием (6).

4. Заключение

Исходя из полученных результатов асимптотического анализа можно сделать вывод о том, что периодическая по времени проверка глобально оптимальна в среднем. Однако, в данной работе не учитывались возможные нестационарные изменения в модели потока моментов плохого состояния динамической системы. Именно поэтому, требуется разработать алгоритмы, способные методом стохастической оптимизации адаптивно определять оптимальные векторы точек контроля.

Список литературы

1. Посохов, М. А. Детерминированная модель контроля динамических объектов / М. А. Посохов, Е. А. Саксонов // Телекоммуникационные и вычислительные системы - 2024: Сборник трудов тридцать второго международного научно-технического форума, Москва, 11–15 ноября 2024 года. – Москва: Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский технический университет связи и информатики", 2024. – С. 289-292. – EDN: UKQVJU.

2. Посохов, М. А. Модель контроля динамической системы / М. А. Посохов // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2026: сборник трудов IX Международного научно-технического форума (Рязань, 3-5 марта 2026 г.): в 11 т. – Рязань: Рязанский государственный радиотехнический университет им. В. Ф. Уткина, 2026. – Т.4 – С. 76-80. – EDN: JYDJLP.
3. Леонтьев, А. С. Методика выбора контрольных точек при решении функциональных задач / А. С. Леонтьев, М. С. Тимошкин // Форум молодых ученых. – 2023. – № 4(80). – С. 63-69. – https://doi.org/10.46566/2500-4050_2023_80_63. – EDN: IKOIZX.
4. Сперанский, Д. В. Генетический алгоритм размещения контрольных точек в цифровом устройстве / Д. В. Сперанский // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т. 17, № 3. – С. 353-362. – https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-3-353-362– EDN: ZEGHWF.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для вузов / Е.С. Вентцель– 7-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 2001. – 575 с.