УДК 519-242 EDN OJPEWH

Планирование эксперимента в учебном процессе

А.В. Ганичева[1], А.В. Ганичев[2*]

[1]Тверская государственная сельскохозяйственная академия, ул. Маршала Василевского (Сахарово), 7, Тверь, 170904, Россия
[2]Тверской государственный технический университет, наб. Аф. Никитина, д. 22, Тверь, 170026, Россия

[*]E-mail: alexej.ganichev@yandex.ru

Аннотация. Внедрение цифровых технологий в учебный процесс вызывает необходимость внедрения математических методов и моделей для формализации его отдельных составляющих. При планировании траектории обучения студентов выдвигаются гипотезы относительно их уровня знаний. Для конкретизации результатов проверки знаний вводятся направления оценивания. По экспериментальным данным определяются ошибки оценок для различных гипотез. Рассчитываются средние риски принимаемых решений. Для уточнения вероятностей оценок проводится эксперимент (например, контрольная работа, опрос, тестирование). Вычисляются вероятности исходов экспериментов, апостериорные вероятности, соответствующие средние риски и выигрыш от эксперимента. Разработанный метод может быть использован не только в учебном процессе, но и в других областях, например, при оценке качества выпускаемой продукции.

Ключевые слова: условная вероятность, состояние, средний риск, гипотеза, решение, оценка.

Experimental design in the educational process

A.V. Ganicheva[1], A.V. Ganichev[2*]

[1]Tver State Agricultural Academy, 7 Marshal Vasilevsky (Sakharovo) Street, Tver, 170904, Russia
[2]Tver State Technical University, 22 Af. Nikitin Embankment, Tver, 170026, Russia

[*]E-mail: alexej.ganichev@yandex.ru

Abstract. The introduction of digital technologies into the educational process necessitates the use of mathematical methods and models to formalize its individual components. When planning students' learning paths, hypotheses are developed regarding their level of knowledge. Assessment methods are introduced to refine knowledge assessment results. Estimation errors for various hypotheses are determined using experimental data. The average risks of decisions are calculated. To refine the probabilities of estimates, experiments (e.g., quizzes, surveys, or tests) are conducted. The probabilities of experimental outcomes, posterior probabilities, corresponding average risks, and the experimental gain are calculated. The developed method can be used not only in the educational process but also in other areas, for example, in assessing the quality of manufactured products.

Keywords: conditional probability, state, average risk, hypothesis, decision, assessment.

1. Введение

Планирование эксперимента – это комплекс мероприятий, предназначенных для проверки выдвинутых гипотез, организации и проведения эффективных опытов, обеспечения достоверности результатов.

В качестве математических методов при планировании эксперимента для отыскания оптимальных решений используют математическую статистику, теорию игр, математическое программирование, теорию полезности [1, 2, 3]. Особую значимость имеет планирование эксперимента в учебном процессе. Здесь существует научно организованный метод исследования – педагогический эксперимент. Для него разработаны специальные методики проведения и внедрения в образовательную деятельность [4, 5].

2. Постановка задачи (Цель исследования)

Целью исследования является разработка метода планирование эксперимента в учебном процессе. Для реализации данной цели используется байесовский подход к принятию решений в условиях неопределенности. Метод основан на проведении неидеального эксперимента.

3. Методы и материалы исследования

Критерии выбора оптимального решения в условиях неопределенности Вальда, Сэвиджа, Гурвица и критерий выбора решений в условиях риска Байеса предполагают использование постоянной информации для принятия решений и не предполагают проведение экспериментов для уточнения условий действительной обстановки. Такой эксперимент целесообразно проводить, если затраты на его проведение меньше выигрыша от его применения.

«Идеальный» эксперимент приводит к точному знанию ситуации (в принятии решений называется - состояния природы $П_j$). Однако в реальных условиях не всегда удается провести такой эксперимент. Обычно эксперимент дает лишь косвенные свидетельства в пользу тех или иных состояний природы.

Рассмотрим «неидеальный» эксперимент.

Пусть эксперимент приводит к появлению одного из k несовместных событий $B_1,...,B_к$. Причем вероятности этих событий зависят от состояний природы $П_1,...,П_j,...П_n$,

рассматриваемых как гипотезы, т.е. имеется набор условных вероятностей $p(B_l/\Pi_j)$, $l = 1,...,k$; $j = 1,...,n$. После проведения эксперимента следует пересчитать доопытные (априорные) вероятности состояний природы $p_{1l},...,,p_{jl},...,p_{nl}$ $(l = 1,...k)$. Для каждого B_l получатся апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез: $\tilde{p}_{1l},...,\tilde{p}_{jl},...,\tilde{p}_{nl}$.

Апостериорные вероятности находятся по формулам Байеса:

$$\tilde{p}_{jl} = \frac{p_j \cdot p\left(B_l/\ddot{I}_j\right)}{p(B_l)} = \frac{p_j \cdot p\left(B_l/\ddot{I}_j\right)}{\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot p\left(B_l/\ddot{I}_j\right)}, \quad (1)$$

здесь

$$p(B_l) = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot p\left(B/\Pi_l\right) = p_1 \cdot p\left(B_1/\Pi_1\right) +$$

$$+ p_2 \cdot p\left(B_1/\Pi_2\right) + ... + p_j \cdot p\left(B_1/\Pi_j\right) + ... + p_n \cdot p\left(B_1/\Pi_n\right), \quad (2)$$

$$l = 1,...,k; \; j = 1,...,n.$$

Такой подход к принятию решений в условиях неопределенности называется байесовским.

Оптимальная стратегия после проведения эксперимента будет новой. Будем обозначать ее A_l^*.

4. Результаты и их обсуждение

Для пояснения изложенного метода рассмотрим конкретный числовой пример из организации учебного процесса.

Для каждого студента в конце семестра по каждому предмету определяется оценка его знаний. Составляющие оценки (гипотезы) следующие:

1) знания обучаемого находятся на достаточном уровне (Π_1);

2) уровень знаний обучаемого студента не достаточен (Π_2).

Пусть априорные вероятности гипотез будут: $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}4$. Для конкретизации результатов проверки знаний (по математическим дисциплинам) вводятся три направления

оценивания: A_1 - проверка определений, A_2 - проверка знаний основных методов; A_3 - проверка умения решать задачи.

Возможные ошибки этих оценок для различных гипотез приведены в таблице 1.

Таблица 1. Ошибки оценок.

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$\overline{r_i}$
A_1	0	5	2
A_2	1	3	$1,8\ \left(A_2^*\right)$
A_3	3	2	2,6

В таблице $\overline{r_i}$ ($i=\overline{1.3}$) обозначает средний риск. Рассчитаем:

$$\overline{r_1}=p\left(A_1/П_1\right)\cdot p_1+p\left(A_1/П_2\right)\cdot p_2=2;\ \overline{r_1}=p\left(A_2/П_1\right)\cdot p_1+p\left(A_2/П_2\right)\cdot p_2=1,8;$$

$$\overline{r_1}=p\left(A_3/П_1\right)\cdot p_1+p\left(A_3/П_2\right)\cdot p_2=2,6.$$

Для уточнения вероятностей состояния природы (относительно ошибок оценок) проводится эксперимент, который может иметь три исхода: B_1 - хороший уровень успеваемости, B_2 - достаточный уровень, B_3 - недостаточный уровень.

Условные вероятности результатов эксперимента в зависимости от состояний природы указаны в таблице 2, там же в последнем столбце записаны априорные вероятности состояний $П_j$:

Таблица 2. Условные вероятности результатов эксперимента.

$П_j$ \ $p(B_r/П_j)$	$p(B_1/П_j)$	$p(B_2/П_j)$	$p(B_3/П_j)$	p_j
$П_1$	0,6	0,25	0,15	0,6
$П_2$	0,2	0,3	0,5	0,4

Выработаем правило решения, которое для каждого исхода эксперимента указывало бы, какую стратегию выбирать. Определим, насколько средний риск при проведении эксперимента меньше, чем средний риск без проведения.

Вычислим вероятности исходов B_j экспериментов, апостериорные вероятности и соответствующие средние риски.

Для B_1: $p(B_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}44$; $\tilde{p}_{11} = \dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}6}{0{,}44} = 0{,}82$; $\tilde{p}_{21} = \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}44} = 0{,}18$;

$\overline{r_1} = 0{,}82 \cdot 0 + 0{,}18 \cdot 5 = 0{,}9$; $\overline{r_2} = 0{,}82 \cdot 1 + 0{,}18 \cdot 3 = 1{,}36$; $\overline{r_3} = 0{,}82 \cdot 3 + 0{,}18 \cdot 2 = 2{,}82$.

Для B_2: $p(B_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}27$; $\tilde{p}_{12} = \dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}6}{0{,}27} = 0{,}56$; $\tilde{p}_{22} = 0{,}44$;

$\overline{r_1} = 0{,}56 \cdot 0 + 0{,}44 \cdot 5 = 2{,}2$; $\overline{r_2} = 0{,}56 \cdot 1 + 0{,}44 \cdot 3 = 1{,}88$; $\overline{r_3} = 0{,}56 \cdot 3 + 0{,}44 \cdot 2 = 2{,}56$.

Для B_3: $p(B_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}15 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}29$; $\tilde{p}_{13} = \dfrac{0{,}15 \cdot 0{,}6}{0{,}29} = 0{,}31$; $\tilde{p}_{23} = 0{,}69$;

$\overline{r_1} = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}7 \cdot 5 = 3{,}5$; $\overline{r_2} = 0{,}31 \cdot 1 + 0{,}69 \cdot 3 = 2{,}38$; $\overline{r_3} = 0{,}31 \cdot 3 + 0{,}69 \cdot 2 = 2{,}31$.

Правило принятия решения:

1) если эксперимент дал B_1, то A_1;

2) если эксперимент дал B_2, то A_2;

3) если эксперимент дал B_3, то A_3.

Полный средний риск $\overline{r_э^*} = 0{,}9 \cdot 0{,}44 + 1{,}88 \cdot 0{,}27 + 2{,}31 \cdot 0{,}29 = 1{,}57$ (усл. ед.)

Выигрыш от эксперимента $\Delta\overline{r^*} = \overline{r^*} - \overline{r_э^*} = 1{,}8 - 1{,}57 = 0{,}23$ (усл. ед.).

В качестве эксперимента в рассматриваемой ситуации может быть: проведение дополнительной контрольной работы, организация опроса обучаемых, тестирование и т.д.

5. Выводы

В статье разработан новый метод планирование эксперимента в учебном процессе, основанный на математическом аппарате проведении неидеального эксперимента. Данный метод особенно востребован при планировании индивидуальных образовательных траекторий обучаемых.

Список литературы

1. Ганичева, А.В. Теория принятия решений / А.В. Ганичева, А.В. Ганичев. – Тверь: Тверской государственный технический университет, 2020. – 95 с.
2. Козинникова, А.А. Основы планирования эксперимента в научных исследованиях / А.А. Козинникова, Н.А. Николаева // Естественные и технические науки. – 2021. – № 6 (157). – С. 162-163.

3. Медведев, П.В. Математическое планирование эксперимента: учебное пособие / П.В. Медведев, В.А. Федотов. – Оренбург: ОГУ, 2017. – 97 с.
4. Ольховский, Д.В. Педагогический эксперимент: методика проведения и внедрения в образовательную деятельность / Д.В. Ольховский Д.В., А.А. Лоскутов // Современные проблемы науки и образования. – 2018. – № 6. – URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=28153 (дата обращения: 07.06.2026).
5. Сиденко, А.С. Планирование экспериментальной работы / А.С. Сиденко // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. – 2011. – № 1. – С. 58-65.